SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

P. PLAZZI

ALCUNI PROBLEMI ASTRATTI DEGENERI

27 APRILE 1989

INTRODUZIONE

1. Lo scopo di questo seminario vuole essere la presentazione di alcuni risultati, concernenti le equazioni astratte degeneri, ottenuti in collaborazione con A. Favini ([FP1], [FP2], [FP3]); di qualche aspetto di essi è già stata data comunicazione in questi Seminari, ma sarà forse utile ripresentare per sommi capi l'impostazione seguita.

2. Lo schema generale delle equazioni studiate dà luogo al seguente problema di Cauchy astratto:

$$(P)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) + L(t)u(t) = f(t,u(t)), & t\in[0,\tau] \\ (M(t)u(t))_{t=0} = w_0 \end{cases}$$

dove $L(\cdot)$, $M(\cdot)$ sono (funzioni a valori) operatori chiusi in un Banach X (con dominio $\subseteq Y$), f è continua, $w_0 \in X$.

Lo studio viene diviso in due parti distinte:

(a) si studia anzitutto l'equazione 'algebrizzata'

$$(P1)\qquad BMu + Lu = h(u)$$

in uno spazio di funzioni a valori in Y; questo equivale a tradurre l'equazione in (P), dove compare la derivata d/dt, in una equazione in uno spazio funzionale *anche nell'incognita temporale* (tipicamente, uno spazio di funzioni ad es. hölderiane, da $[0,\tau]$ ad uno spazio di Sobolev nelle variabili di spazio). E' chiaro come questo permetta di ottenere risultati di regolarità temporale in termini di spazi in cui prescrivere la soluzione; le ipotesi su B saranno naturalmente influenzate dalla interpretazione privilegiata che si vuol poter dare di B come di una deriva-

zione (con condizioni iniziali).

(b) Bisogna poi naturalmente imporre condizioni sotto le quali (P) è effettivamente riducibile a (P1), l'equazione algebrica: questo coinvolge la definizione stessa di soluzione; nel caso delle equazioni astratte (ma non solo di esse), molti concetti diversi di soluzione sono stati introdotti - e mi riallaccio qui alle considerazioni fatte da A. Venni in uno dei seminari precedenti. In questo caso la soluzione verrà comunque intesa strettamente, come una funzione per cui i due membri della equazione sono perfettamente definiti ed eguali, mentre la condizione iniziale va intesa come valore per t=0 (per una discussione dei vari tipi di definizione proposti, vedi [V]).

LO STUDIO DELL'EQUAZIONE (P1)

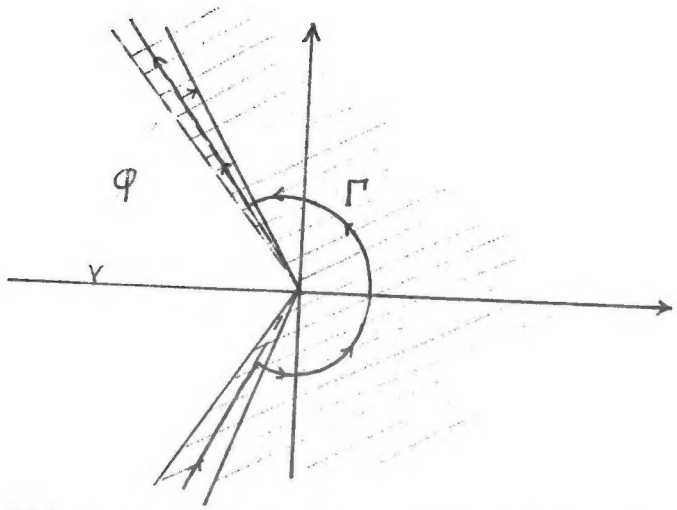
3. Per trasformare la (P1) in una equazione di punto fisso, è opportuno avere risultati di esistenza e dipendenza continua dai dati per l'equazione lineare (in cui h non dipende da u), e si ha:

TEOREMA ([FP1]). *Data l'equazione*

(P2) $(B+s)Mu + Lu = h, \quad s \in R$

con L,M *operatori lineari chiusi da* F *in* E, B *da* E *in sé,* $h \in E$ (E,F *sono spazi di Banach), facciamo le seguenti ipotesi:*

(H1) B *è densamente definito e* $\forall z \in C$ *con* $|\arg z-\pi| \leq \phi<\pi/2$ (o $z = 0$), *esiste* $(B-zI)^{-1}$ *e questo risolvente decresce con* $\|(B-zI)^{-1}; \mathscr{L}(E)\| \leq \text{cost}(1+|z|)^{-1}$



(H2) $\mathscr{D}(L) \subseteq \mathscr{D}(M)$, L *è invertibile e* $(zM+L)$ *si inverte se* $z \neq 0$ *e* $|\arg z| < \pi - \phi + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, *con*

$$\|L(zM+L)^{-1};\ \mathscr{L}(E)\| \leq \text{cost}(1+|z|)^{\alpha} \qquad 0 \leq \alpha < 1$$

(H3) *Se* $T = ML^{-1}$, $V = (E, \mathscr{D}(B))_{\theta,\infty}$ $0 < \theta < 1$, *il commutatore* $[B;\ (zT+I)^{-1}]$ *su* $\mathscr{D}(B)$ *ha estensioni limitate in* $\mathscr{L}(E)$, $\mathscr{L}(V)$ *con stime (se* $\mathscr{X} = E$ *o* V*)*

$$\|[B;(zT+I)^{-1};\ \mathscr{L}(\mathscr{X})\| \leq C(1+|z|)^{\sigma}, \quad 0 \leq \sigma < 1$$

Sotto queste ipotesi si può provare che esiste un'unica soluzione in V *se* $\alpha < \theta < 1$, $h \in V$ *ed* s *è sufficientemente grande.* Si ha però soltanto $Lu,\ BMu \in (E; \mathscr{D}(B))_{\theta-\alpha,\infty}$ perdendo così in regolarità temporale. Di qui l'interesse prevalente del caso $\alpha = 0$ in (H2). Ancora, si può avere $s = 0$ richiedendo che la norma di B^{-1} sia piccola: ciò restringe le applicazioni al provare esistenza *locale* per le soluzioni.

4. La dimostrazione si basa sulla costruzione di un operatore

$$Sf = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} z^{-1}(zT+I)^{-1}B(B-z)^{-1}f\,dz, \qquad f \in V$$

dove Γ è la curva in figura; la manipolazione formale di esso permette facilmente di vedere come scrivere la soluzione. Le ipotesi (H1)-(H2)-(H3) garantiscono di

poter scrivere Sf e la correttezza dei passaggi formali. Piuttosto che riportare l'analogo risultato del caso non lineare, osserviamo in che modo si enuncino i risultati di regolarità temporale: come appartenenza ad uno spazio interpolato tra E ed il dominio di B, cosa che apaprirà naturale se si pensa all'interpretazione di B come derivata rispetto a t.

APPLICAZIONI

5. Questi risultati si possono applicare allo studio del problema degenere lineare

$$(P3) \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) + L(t)u(t) = f(t) \\ (M(t)u(t))_{t=0} = w_0 \end{cases}$$

direttamente, oppure usare la sua versione astratta per studiare (P): nel seguito tratteggerò per sommi capi due applicazioni, una delle quali ad una equazione lineare del tipo di (P3).

6. (Equazioni integrodifferenziali degeneri)

Le equazioni integrodifferenziali astratte sono state studiate a fondo da Da Prato, Sinestrari, Lunardi ed altri (vedi [DP], [L1], [L2], [LS]). Sfruttando questi risultati, in [FP3] è provato che, dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(Mu(t)) + Lu(t) = \int_0^t K(t-s)u(s)ds + f(t), \quad t \in [0,\tau] \\ Mu(0) = w_0 \end{cases}$$

(L, M costanti; esiste M^{-1} e $-LM^{-1}$ genera un semigruppo analitico in uno spazio X) esso ha soluzione sotto le seguenti ipotesi (cfr. [DP]), leggermente più restrittive del necessario:

(i) $\mathscr{D}(K(s)) = \mathscr{D}(L) \quad \forall s \in [0,\tau]$

(ii) $s \to K(s)x$ è fortemente misurabile $\forall x \in \mathscr{D}(L)$

(iii) $\|K(s); \mathscr{L}(\mathscr{D}(L),X)\| \leq$ cost su $[0,\tau]$;

(iv) $f \in C^{(\theta)}[0,\tau;X]$ e, posto $w_0 = Mu_0 \in M(\mathscr{D}(L))$ si ha

$$\sup_{t>1} \|t^{\theta} L(tM+L)^{-1}[f(o)-Lu_0]; X\| < +\infty .$$

Si ha una unica soluzione su $[0,\tau]$ se si impone $(Mu)'$, $Lu \in C^{\theta}[0,\tau;X]$, ma $\tau>0$ deve essere sufficientemente piccolo: in altre parole, si ha esistenza *locale* della soluzione, sebbene il problema sia lineare. Questo può sorprendere, ma è facile vedere che, in caso di degenerazione, non si può in generale avere soluzione globalmente definita.

Dal punto di vista formale, la richiesta che $\tau>0$ sia sufficientemente piccolo deriva dalla necessità di risolvere una equazione del tipo di (P2) con s=0 e quindi (vedi sopra) di avere B^{-1} piccolo in norma. Confrontando con i risultati citati si noterà soprattutto che la regolarità temporale è enunciata in termini di spazi C^{α} anziché, come in essi ([L1], [LS]), di spazi h^{α}.

7. (Equazioni paraboliche degeneri)

Presento un caso legato, per chiarezza, a funzioni in due variabili (una sola variabile di spazio, dunque).

Dato il problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + 1\right)u(t,x) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) - ku(t,x) + \\ \\ + \psi\left(t,u,\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \qquad (k>0, \text{ un parametro}) \\ \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(0,x) = w_0(x), \quad x \in [0,\pi] \\ \\ u(t,o) = u(t,\pi) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,o) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

lo spazio ambiente è $\tilde{C} = \{f \in C[0,\pi;\mathbf{C}],\ f(o) = f(\pi)=0\}$. Se si realizza L con

$$Lf = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}f + kf, \quad \mathcal{D}(L) = \{u \in C^2[0,\pi;\mathbf{C}],\ u,\ u'' \text{ in } 0,\ \pi \text{ si annullano}\}$$

ed M è $\dfrac{d^2}{dx^2} + I$, con la condizione ai limiti, $w_o = u_o + u_o''$ con $u_o \in \mathcal{D}(L)$ e ψ è compatibile con u_o nel senso che

$$\begin{cases} \phi \text{ è } C^2 \text{ da } [o,\tau] \times R^3 \text{ con} \\ \\ \sup\limits_{x \in [0,\pi]} \left|\dfrac{\partial \psi}{\partial X_3}(0,u_o(x),\ldots)\right| \text{ piccolo} \\ \\ \psi(t,0,p,0) = \dfrac{\partial \psi}{\partial x_2}(t,o,p,o) = 0 \quad \forall p \in R, \forall t \in [o,\tau] \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \text{il problema ai limiti } \left(\frac{d^2}{dx^2} + I\right)v(x) = \phi(0,u_o(x),\ldots) + u_o'' - ku_o \\ \text{ha soluzione } v \in \mathcal{D}(L) \end{cases}$$

allora possiamo tradurre il problema nello schema astratto impostato e dire che vi è una soluzione $C^{(1)}$ nel tempo su $[o,\tau]$ ($\tau>0$ sufficientemente piccolo), con

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1\right)u \text{ di classe ancora } C^{(1)} \text{ nel tempo.}$$

Risultati analoghi, legati anche a quelli di [S1], [S2], possono venire ottenuti anche in dimensione superiore.

BIBLIOGRAFIA

[FP] A. FAVINI-P. PLAZZI: "On some abstract degenerate problems of parabolic type", in tre parti:
[FP1] Nonlinear Anal. 12 (1988);
[FP2] Nonlinear Anal. 13 (1989);
[FP3] "In corso di stampa su Osaka J. Math.".

[DP] G. DA PRATO: "Abstract Differential Equations, Maximal Regularity and Linearization". Proc. Symp. Pure Math, 45/1 (1986).

[L1] A. LUNARDI: "Regular Solutions for Time Dependent Abstract Integrodifferential Equations with Singular Kernel". J. Math. Anal. Appl. 63 (1986).

[L2] A. LUNARDI: "Interpolation Spaces Between Domains of Elliptic Operators and Spaces of Continuous Functions with Applications to Nonlinear Parabolic Equations". Math. Nach. 121 (1985).

[V] A. VENNI: "Sul problema di Cauchy per un'equazione semilineare astratta del secondo ordine". Seminario del 23/2/1989.

[LS] A. LUNARDI e E. SINESTRARI: "C^{α}-regularity of Non Autonomons Linear Integrodifferential Equations of Parabolic Type". J. Diff. Eqs. 63 (1986).

[S1] H.B. STEWART, "Generation of Analytic Semigroups by Strongly Elliptic Operators Under General Boundary Conditions". Trans. AMS 259 (1980).

[S2] H.B. STEWART, "Generation of Analytic Semigroups by Strongly Elliptic Operators", Trans. AMS 199 (1974).